

2023 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報通信工学専攻

専門科目試験問題 (電気工学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて18ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、①「制御工学」、②「電磁気工学」、③「量子電子物性1」、「量子電子物性2」、「量子電子物性3」、及び、④「信号処理」、の全部で4分野(①~④)6題あり、この順番に綴じられている。この4分野(①~④)6題のなかから2分野以上3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【制御工学】解答は、白色の解答用紙に記入すること。

以下の問1, 問2に答えよ。

問1 図1のフィードバックシステムについて、以下の問いに答えよ。ただし、

$$P(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$

であり、 $R(s)$, $Y(s)$ はそれぞれ、入力を表す時間関数 $r(t)$ ($t \geq 0$) のラプラス変換、出力を表す時間関数 $y(t)$ ($t \geq 0$) のラプラス変換、 K_1 , K_2 は正の実数値をとる定数ゲインである。

- (i) $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数を求めよ。ただし、伝達関数における多項式は降べきの順（次数の高い順）に並べて書くこと。
- (ii) $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数のすべての極の実部が -1 未満となるための、定数ゲイン K_2 に関する必要十分条件を求めよ。
- (iii) 入力 $r(t)$ と出力 $y(t)$ の偏差を $e(t) = r(t) - y(t)$ ($t \geq 0$) としたとき、出力 $y(t)$ がランプ信号 $r(t) = t$ ($t \geq 0$) に定常偏差なく追従する（すなわち、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ となる）ための、定数ゲイン K_1 , K_2 に関する必要十分条件を求めよ（ただし、条件 $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ の記載は不要）。
- (iv) 定数ゲインを $K_1 = 1$, $K_2 = 1$ とし、入力を $r(t) = \sin t$ ($t \geq 0$) とする。このとき、定常状態における出力は $Y_0 \sin(t + \phi)$ となった。 Y_0 および ϕ の値をそれぞれ求めよ。

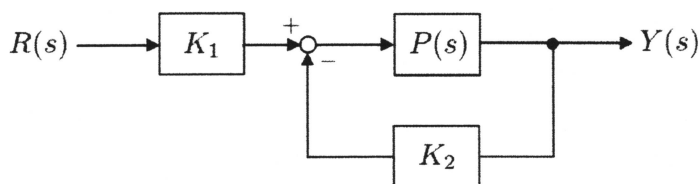


図1

問2 次の状態方程式と出力方程式で表現される2入力1出力の線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ であり、 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は状態、 $u_1(t)$ と $u_2(t)$ は入力、 $y(t)$ は出力を表し、 $t \geq 0$ とする。

- (i) このシステムの可制御性行列と可観測性行列を求め、可制御性と可観測性を判定せよ。ただし、その判定理由も述べること。
- (ii) 入力 $u_1(t)$ と $u_2(t)$ をともに恒等的に零、すなわち、 $u_1(t) = 0 (t \geq 0)$ かつ $u_2(t) = 0 (t \geq 0)$ としたときの状態 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ をそれぞれ、 t の関数として求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ での初期状態を $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする。
- (iii) 入力 $u_1(t)$ と $u_2(t)$ をともに単位ステップ関数、すなわち、 $u_1(t) = 1 (t \geq 0)$ かつ $u_2(t) = 1 (t \geq 0)$ としたときの出力 $y(t)$ を t の関数として求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ での初期状態を $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする。
- (iv) k を任意の実数値をとるパラメータとする。 $\mathbf{u}(t) = -k\mathbf{x}(t)$ なる状態フィードバック制御を施したフィードバックシステムが漸近安定となるための、 k に関する必要十分条件を求めよ。

専門用語の英訳

フィードバックシステム	feedback system
ラプラス変換	Laplace transform
定数ゲイン	constant gain
伝達関数	transfer function
多項式	polynomial
降べきの順	descending order of powers
極	pole
必要十分条件	necessary and sufficient condition
ランプ信号	ramp signal
定常偏差	steady-state error
定常状態	steady state
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
線形時不変システム	linear time-invariant system
可制御性行列	controllability matrix
可観測性行列	observability matrix
可制御性	controllability
可観測性	observability
恒等的に零	identically zero
単位ステップ関数	unit step function
状態フィードバック制御	state feedback control
漸近安定	asymptotically stable

【電磁気工学】解答は、黄色の解答用紙に記入すること。

以下の文章を読んで、問 1~3 について答えよ。

我々の周りには多くのプラズマが多様な状態で存在する。宇宙プラズマ（星雲間、太陽など）や、身近な蛍光灯などのグロー放電プラズマ、また核融合プラズマなど、それぞれが異なる特徴を持っている。多様なプラズマを温度と密度で分類すると、例えば図 1 のようになる。

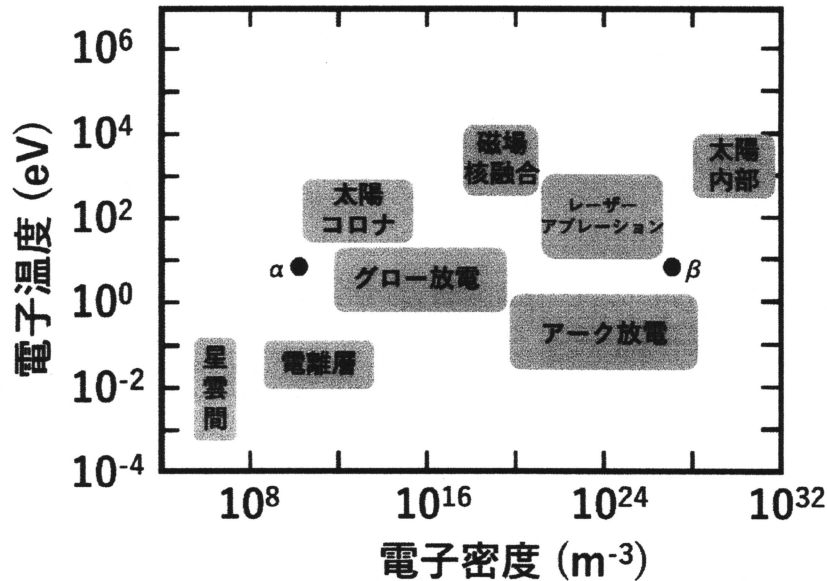


図 1 電子温度と電子密度で分類された多様なプラズマ

問 1 プラズマ中の電位はある距離以上のスケールで遮蔽される。この遮蔽の距離をデバイ長 λ_D という。デバイ長を見積もるために、局所的な密度変化が起こった際に生じる電位について、(1)式の Poisson 方程式を考える。簡単のため、問 1 においては直交座標系とし、物理量は x 方向のみに依存し、 y, z 方向には一様とする。また、イオンは 1 価の陽イオンのみとし、その運動は無視できるとする。

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = -q(n_i - n_e) \quad (1)$$

真空の誘電率を ϵ_0 、電位を ϕ 、素電荷を q 、イオンの密度を n_i 、電子の密度を n_e とする。電位が生じる前の密度は $n_i = n_e = n_0$ とする。ここで、電子の分布関数は、

$$n_e = n_0 \exp(q\phi/k_B T_e) \quad (2)$$

で与えられる。 k_B は Boltzmann 定数であり、 T_e は電子温度である。

- (a) $q\phi/k_B T_e \ll 1$ のとき $\exp(q\phi/k_B T_e)$ を $q\phi/k_B T_e$ について Taylor 展開し、3 次の項まで示せ。
- (b) (2) 式の分布関数を (1) 式に代入し、Taylor 展開の 2 次以降の項を省略し、整理した形で示せ。得られた方程式の解について、 $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T_e / q^2 n_0}$ を用いて整理し、 λ_D が遮蔽距離を表すことを示せ。
- (c) 電子の熱速度 v_{th} をデバイ長 λ_D とプラズマ振動数 ω_p を用いて表せ。また、この関係が示すプラズマ振動における電子の挙動を端的に述べよ。

問 2 デバイ長と電子温度を用いると、プラズマの平均ポテンシャルエネルギー U_p 、平均熱運動エネルギー U_T がそれぞれ次のように与えられる。

$$U_p = q\phi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \lambda_D} \quad (3)$$

$$U_T = \frac{3}{2} k_B T_e \quad (4)$$

(d) U_T と U_p の比を計算し、デバイ球(デバイ長を半径とする球)との関係を示せ。

(e) デバイ球に含まれる荷電粒子の数をプラズマパラメータ N_λ と呼ぶ。 N_λ を λ_D 、 n_0 を用いて表せ。

(f) 問 1(a)における $q\phi/k_B T_e \ll 1$ の仮定を用いて、荷電粒子群がプラズマとして振る舞うための N_λ の条件を述べよ。また、 N_λ がこの条件を満たさないとき、荷電粒子群はどのような状態にあると考えられるか述べよ。

問 3 図 1 に挙げた様々なプラズマにおいて、たとえ温度と密度が異なったプラズマ同士でも、共通する特徴を備えることがある。プラズマパラメータ N_λ を用いれば、単一パラメータでプラズマの特徴を示すことができる。図 1 に N_λ の等高線を引くことで、点 α 、点 β における状態と同等の N_λ をもつプラズマを 1 つ以上選んで示せ。また、 N_λ がどのようにプラズマの特徴を端的に示しているか述べよ。

専門用語の英訳

遮蔽	shielding
直交座標系	Cartesian coordinates
真空の誘電率	dielectric constant of vacuum
電位	potential
素電荷	elementary charge

【量子電子物性1】 解答は、桃色の解答用紙に記入すること。

次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、プランク定数 h を 2π で割ったものを \hbar 、虚数単位を i とする。また $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ の公式を用いてもよい。

図 1-1 のように、無限の高さのポテンシャル障壁に挟まれた一次元井戸型ポテンシャルの中に閉じ込められた質量 m の粒子を考える。井戸幅を a とし、ポテンシャルは次の式で与えられる。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, a < x \\ 0 & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (1)$$

$0 \leq x \leq a$ においてエネルギーが ε の粒子の状態の波動関数を $\varphi(x)$ とすると時間に依存しないシュレーディンガー方程式は

$$[\quad \text{①} \quad] \quad (2)$$

となる。ここで一般解を

$$\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad (3)$$

と表すとする。ただし、 k は波数、 A と B は実数とする。

境界条件は $\varphi(0) = \varphi(a) = [\quad \text{②} \quad]$ であり、 k は自然数 n を使って

$$k = [\quad \text{③} \quad] \quad (4)$$

となり、波動関数の規格化条件より波動関数は

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin kx \quad (5)$$

となる。このとき、粒子のエネルギーは離散的となり、それを ε_n とあらわす。 ε_n は、 a と n を用いて、

$$\varepsilon_n = [\quad \text{④} \quad] \quad (6)$$

となる。波動関数とエネルギーを決める n を [⑦] とよぶ。 $n = 1$ が最低（基底）状態のエネルギーを与える。

ここで異なるエネルギー $\varepsilon_n, \varepsilon_j$ ($n \neq j$) に対する波動関数を $\varphi_n(x)$ と $\varphi_j(x)$ として、次の積分を考える。

$$\int_0^a \varphi_j^*(x) \varphi_n(x) dx \quad (7)$$

ただし $\varphi_j^*(x)$ は $\varphi_j(x)$ の複素共役を表す。 $n \neq j$ なので、この積分の値は [⑤] であり、このとき2つの波動関数は [⑧] しているという。

波動関数 $\varphi(x)$ の状態にある粒子の物理量 Q を観測したときに得られる測定値の期待値 $\langle Q \rangle$ は、 Q に対応する演算子 \hat{Q} を使って $\langle Q \rangle = \int \varphi^*(x) \hat{Q} \varphi(x) dx$ と与えられる。したがって位置 x と運動量 p の期待値 $\langle x \rangle$ と $\langle p \rangle$

は、それぞれの演算子 x と $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ を使って、

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2} \quad (8)$$

$$\langle p \rangle = 0 \quad (9)$$

と求められる。

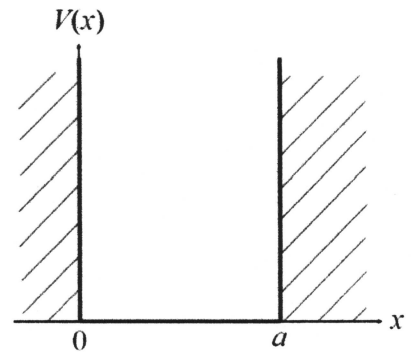


図 1-1

次に、三次元空間 (x, y, z) へ拡張し、粒子が一辺 a の立方体の箱の中で $(0 \leq x, y, z \leq a)$ 、それぞれの方向について無限大のポテンシャル障壁によって閉じ込められているとする。このときそれぞれの方向の波数を (k_x, k_y, k_z) 、[⑦]を (n_x, n_y, n_z) (n_x, n_y, n_z は自然数)とする。式(4)と同様に、 k_x, k_y, k_z は離散的な値となる。規格化された波動関数 $\varphi(x, y, z)$ は、 n_x, n_y, n_z と a を用い、 x, y, z の関数として、

$$\varphi(x, y, z) = [\text{⑥}] \quad (10)$$

となり、エネルギー $\varepsilon_{n_x, n_y, n_z}$ は、 n_x, n_y, n_z と a を用いて、

$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = [\text{⑦}] \quad (11)$$

となる。基底状態は $(n_x, n_y, n_z) = (1, 1, 1)$ で与えられ、そのエネルギー $\varepsilon_{1,1,1}$ は[⑧]である。最低(第一)励起状態を与える (n_x, n_y, n_z) は、[⑨]である。このように異なる波動関数の状態が同じエネルギーを持つことを[⑩]しているという。

問1 文章中の空欄 [①] ~ [⑨] にあてはまる数式または数字を答えよ。ただし⑨には、適切な (n_x, n_y, n_z) の組み合わせをすべて示すこと。また [⑦] ~ [⑩] にあてはまる語句を答えよ。

問2 式(3)に対して、境界条件と波動関数の規格化条件から式(5)を導出せよ。

問3 離散的なエネルギー準位が区別できるためには、準位間のエネルギー差が、例えば熱エネルギーよりも大きいことが必要である。そこで熱エネルギーを 10 meV とし、エネルギー準位間隔が熱エネルギーの4.0倍より大きければその条件を満たすと仮定する。本文中の一次元井戸型ポテンシャル中の粒子の基底状態と最低励起状態とのエネルギー差が熱エネルギーの4.0倍となる井戸幅 a を計算し、有効数字2桁で答えよ。単位も示すこと。粒子の質量を $m = 0.60m_0$ (ただし m_0 は静止質量で $9.0 \times 10^{-31} \text{ kg}$ とする)とし、簡単のために \hbar は $1.0 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 、 π は3.0とする。1.0 eVは $1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ とする。

問4 本文中で扱った一次元井戸型ポテンシャル中の粒子の基底状態 ($n = 1$) について、位置 x の不確定さ Δx と運動量 p の不確定さ Δp の間の不確定性原理 $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ について考える。

1) 式(8)と式(9)を導出せよ。

2) p^2 の期待値 $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。導出過程も示せ。

3) $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ 、 $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ と定義する。また x^2 の期待値 $\langle x^2 \rangle$ は $\langle x^2 \rangle = a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right)$ と計算される。このとき、式(8)と式(9)と2)で求めた $\langle p^2 \rangle$ を使い、 Δx と Δp の間に不確定性原理 $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立つことを示せ。

量子電子物性1 単語の英訳

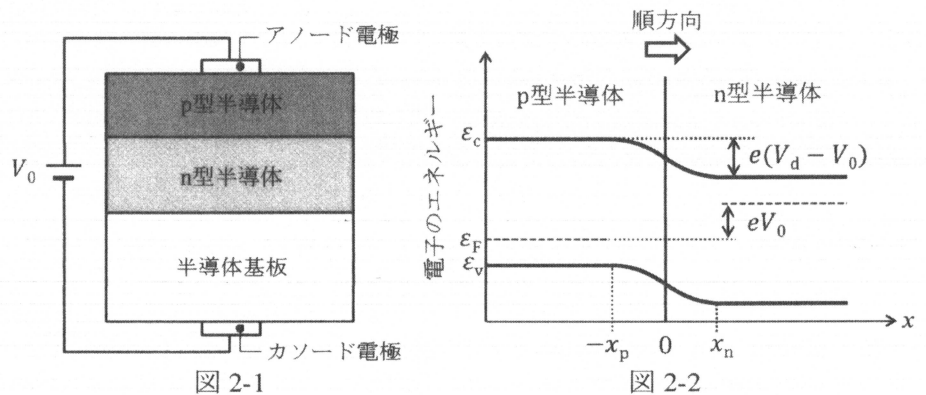
無限の高さ：	infinite height
ポテンシャル障壁：	potential barrier
一次元井戸型ポテンシャル：	one dimensional potential well
井戸幅：	well width
波動関数：	wavefunction
シュレーディンガー方程式：	Schrödinger equation
波数：	wavenumber
境界条件：	boundary condition
規格化条件：	normalization condition
離散化：	discretization
最低（基底）状態：	lowest (ground) state
期待値：	expectation value
位置：	position
運動量：	momentum
三次元：	three dimensional
最低（第一）励起状態	lowest (first) excited state
静止質量：	rest mass
不確定性原理：	uncertainty principle

【量子電子物性2】 解答は、緑色の解答用紙に記入すること。

半導体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数を k_B 、素電荷を e 、真空の誘電率を ϵ_0 、半導体の比誘電率を κ とする。

図 2-1 に示すような縦型のホモ接合のpnダイオードを設計する。pnダイオードは半導体基板上にn型半導体およびp型半導体を順に積層成長させることで作製する。それぞれの厚さの設計の際には pn 接合界面付近の空乏層幅を見積もる必要がある。図 2-2 は順方向を正とする電圧 V_0 印加時におけるpn接合近傍のエネルギー帯図である。n型およびp型領域における空乏層の厚さをそれぞれ x_n および x_p とし、pn接合界面 ($x = 0$) を境にして、不純物分布が階段状に急激に変化する場合を考える。n型領域ではドナーのみが濃度 N_D で均一に存在し、p型領域ではアクセプタのみが濃度 N_A で均一に分布しているとする。[下線1] V_d は拡散電位、 ϵ_c および ϵ_v はそれぞれ伝導帯の下端および価電子帯の上端のエネルギー、 ϵ_F はp型半導体のフェルミエネルギーである。

ドナーおよびアクセプタが全てイオン化しており、空乏層内にキャリアが存在しない場合、電気的中性条件より正負の総電荷量は等しく N_A 、 N_D 、 x_n 、 x_p の間には以下の式が成り立つ。



$$[\quad \text{①} \quad] \tag{1}$$

位置 x における電位を $V(x)$ とすると、n型領域側の空乏層内 ($0 \leq x \leq x_n$) における電位は以下のポアソンの方程式から求められる。

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = - [\quad \text{②} \quad] \quad (0 \leq x \leq x_n) \tag{2}$$

ここで、空乏層端において電界が存在しないことから以下の境界条件が成り立つ。

$$\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_n} = 0 \tag{3}$$

式(2)を1回積分することに加え、式(3)の適用により以下のように記述できる。

$$\frac{dV(x)}{dx} = [\quad \text{③} \quad] \quad (0 \leq x \leq x_n) \tag{4}$$

同様に境界条件を考慮すると、p型領域側の空乏層内 ($-x_p \leq x \leq 0$) においては下記の式が成り立つ。

$$\frac{dV(x)}{dx} = [\quad \text{④} \quad] \quad (-x_p \leq x \leq 0) \tag{5}$$

次に、空乏層以外での電圧降下が無視できるとし、 $V(-x_p) = 0$ とすると $V(x_n)$ は以下のように表すことができる。

$$V(x_n) = [\quad \textcircled{5} \quad] \quad (6)$$

式(4)および式(5)を積分することで、下記の式を得ることができる。

$$V(x) = [\quad \textcircled{6} \quad] \quad (0 \leq x \leq x_n) \quad (7)$$

$$V(x) = [\quad \textcircled{7} \quad] \quad (-x_p \leq x \leq 0) \quad (8)$$

ここで、 $x = 0$ において式(7)と式(8)が等しくなることから下記の式を得ることができる。

$$N_A x_p^2 + N_D x_n^2 = [\quad \textcircled{8} \quad] \quad (9)$$

この式(9)および電気的中性条件の式(1)より、以下の式(10)および式(11)を得る。

$$x_n = [\quad \textcircled{9} \quad] \quad (10)$$

$$x_p = [\quad \textcircled{10} \quad] \quad (11)$$

以上の式より $V_0 < V_d$ の場合、空乏層幅 d は下記のように求まる。

$$d = x_n + x_p = \sqrt{\frac{[\quad \textcircled{11} \quad]}{e N_A N_D}} \quad (12)$$

式(12)より、逆方向に電圧を印加すると空乏層幅が大きくなることがわかる。今回製作するpnダイオードにおいて $N_A \gg N_D$ とした場合、式(12)は以下の式に近似できる。

$$d = \sqrt{\frac{[\quad \textcircled{12} \quad]}{e N_D}} \quad (13)$$

式(13)より、ある設計上の最大逆方向電圧を印加したときの空乏層幅 d_{\max} を見積もることができる。n型半導体層の厚さはこの d_{\max} より大きく設定する必要がある。

一方、順方向電圧印加時については、空乏層以外での電圧降下が無視できなくなるため、寄生抵抗をなるべく小さくすることが求められる。主な抵抗要因として、半導体基板の抵抗およびカソード電極で用いている金属電極—半導体基板間の接触抵抗が挙げられる。半導体基板の抵抗を小さくするためには、基板のキャリア濃度をなるべく高くする必要がある。〔下線2〕金属—半導体基板間の接触抵抗を小さくするためには、電極形成過程における工夫が必要である。

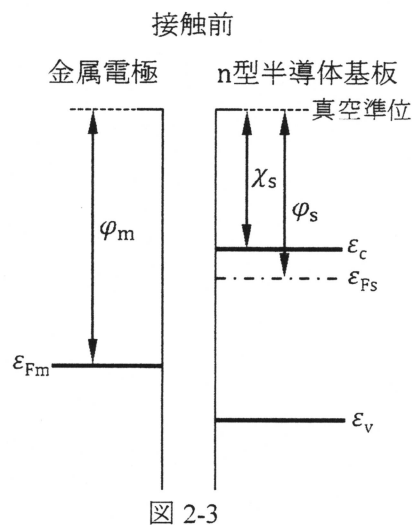
問1 文章中の空欄 [$\textcircled{1}$] ~ [$\textcircled{12}$] にあてはまる数式を答えよ。

問2 文章中の下線1について、半導体がシリコンである場合、温度 300 K における拡散電位 V_d を単位も含めて有効数字2桁で答えよ。ただし、真性キャリア濃度 $n_i = 1.1 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ 、 $N_A = 1.1 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ 、 $N_D = 2.2 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ とする。必要であれば、 $\ln 2 = 0.69$ 、 $\ln 3 = 1.1$ 、 $\ln 5 = 1.6$ を用いよ。ここで、 \ln は自然対数を表す。

問3 文章中の下線2について、以下の問いに答えよ。

1) 図 2-3 は金属電極とn型半導体基板がショットキー接触する前におけるそれぞれのエネルギー帯図である。金属の仕事関数を ϕ_m 、n型半導体基板の仕事関数を ϕ_s ($\phi_s < \phi_m$)、n型半導体基板の伝導帯の下端から真空準位までのエネルギー差を表す電子親和力を χ_s 、金属のフェルミエネルギーを ϵ_{Fm} 、n型半導体基板のフェルミエネルギーを ϵ_{Fs} としている。n型半導体基板と金属電極が接触した後のエネルギー帯図を図示し、金属電極側から見たエネルギー障壁高さ ϕ_b とn型半導体基板側の拡散電位によるエネルギー差を ϕ_m 、 ϕ_s 、 χ_s を用いてそれぞれ明記せよ。なお、図中に ϕ_m 、 ϕ_s 、 χ_s 、 ϵ_c 、 ϵ_v 、 ϵ_{Fm} 、 ϵ_{Fs} を明記すること。

2) 金属電極—n型半導体基板間の接触抵抗を小さくするためには、ショットキー障壁が生じないように適切な仕事関数の金属電極を選択するほか、ショットキー障壁が生じる条件においては、接触界面における半導体の不純物濃度を高くする手段が一般的に用いられる。この手段で接触抵抗が小さくなる理由を「空乏層」という言葉を用いて説明せよ。



量子電子物性2 単語の英訳

半導体 :	semiconductor
素電荷 :	elementary charge
真空 :	vacuum
誘電率 :	permittivity
基板 :	substrate
空乏層 :	depletion layer
接合 :	contact
エネルギー帯 :	energy band
不純物 :	impurity
分布 :	distribution
拡散電位 :	diffusion potential
伝導帯 :	conduction band
価電子帯 :	valence band
フェルミエネルギー :	Fermi energy
キャリア :	carrier
電気的中性条件 :	electroneutrality condition
ポアソンの方程式 :	Poisson's equation
電界 :	electric field
境界条件 :	boundary condition
電圧降下 :	voltage drop
逆方向電圧 :	reverse voltage
順方向電圧 :	forward voltage
寄生抵抗 :	parasitic resistance
金属電極 :	metal electrode
接触抵抗 :	contact resistance
電極形成過程 :	electrode formation process
ショットキー接触 :	Schottky contact
仕事関数 :	work function
真空準位 :	vacuum level
電子親和力 :	electron affinity
エネルギー障壁高さ :	energy barrier height

【量子電子物性3】 解答は、灰色の解答用紙に記入すること.

磁性に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、素電荷を e 、電子の質量を m 、ボルツマン定数を k_B 、プランク定数 h を 2π で割ったものを \hbar 、真空の透磁率を μ_0 とする。

物質を構成しているのは原子であり、原子の磁気モーメントは主に電子が担っている。すなわち、物質の磁氣的性質を支配しているのは電子である。電子が担う磁気モーメントには、軌道運動による項とスピンによる項がある。いま、軌道角運動量 $\hbar\mathbf{l}$ とスピン角運動量 $\hbar\mathbf{s}$ を持つ電子1個を含む原子を考え、この1電子原子の示す磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を求めよう。軌道磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_l$ は、電子が原子核を中心とした半径 r の円軌道を角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$ で回転運動しているとして求められる(図3-1)。ここで、 $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ であり、 \mathbf{n} は $\boldsymbol{\omega}$ の単位ベクトルである。この運動による環状電流の大きさ $|I|$ は、

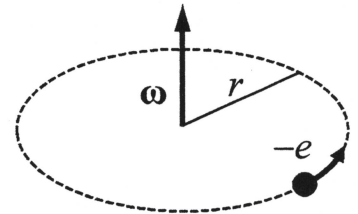


図 3-1

$$|I| = [\quad \text{①} \quad] \quad (1)$$

で与えられるから、軌道磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_l$ は $\omega\mathbf{n}$ を用いて

$$\boldsymbol{\mu}_l = [\quad \text{②} \quad] \quad (2)$$

と書ける。一方、この古典的運動の角運動量 \mathbf{P} は

$$\mathbf{P} = [\quad \text{③} \quad] \quad (3)$$

である。量子力学では運動状態は量子化され、 \hbar の整数倍で変化し、 $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{l}$ であることを考慮して、 \mathbf{l} を用いて軌道磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_l$ を表すと

$$\boldsymbol{\mu}_l = [\quad \text{④} \quad] \mathbf{l} \quad (4)$$

となる。この[④]の絶対値をボーア磁子とよび、 μ_B で表す。また、スピン磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_s$ は、

$$\boldsymbol{\mu}_s = -2\mu_B\mathbf{s} \quad (5)$$

と表される。式(4)、(5)より、1電子原子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は

$$\boldsymbol{\mu} = [\quad \text{⑤} \quad] \mu_B \quad (6)$$

となる。

ここで、 $+Ze$ の電荷をもつ原子核について考えよう。電子から見れば、正に帯電した原子核が電子の周りを円運動しているとみなせる。この円運動による環状電流は、電子の位置に磁界 \mathbf{H} をつくるが、電子の軌道角運動量 $\hbar\mathbf{l}$ を用いて磁界 \mathbf{H} は

$$\mathbf{H} = [\quad \text{⑥} \quad] \mathbf{l} \quad (7)$$

と表すことができる。この磁界 \mathbf{H} とスピン磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_s$ との相互作用エネルギー U は、

$$U = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot (\mu_0\mathbf{H}) = \zeta\mathbf{s} \cdot \mathbf{l} \quad (8)$$

となる。これをスピン軌道相互作用とよび、その比例係数 ζ は正の定数である。このスピン軌道相互作用

により \mathbf{l} と \mathbf{s} は結合し、1電子の全角運動量 $\hbar\mathbf{j}$ は2つの角運動量のベクトル和として合成され、

$$\hbar\mathbf{j} = \hbar\mathbf{l} + \hbar\mathbf{s} \quad (9)$$

と表される。ここで、全角運動量、軌道角運動量とスピン角運動量の大きさは、全角運動量子数 j 、軌道角運動量子数 l とスピン角運動量子数 s を用いて、それぞれ、

$$|\hbar\mathbf{j}| = \hbar\sqrt{j(j+1)}, \quad |\hbar\mathbf{l}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad |\hbar\mathbf{s}| = \hbar\sqrt{s(s+1)} \quad (10)$$

となる。1電子スピンの磁界方向成分は2通りあるから、 j として可能な値は $l+s$ と $l-s$ の2つである。 ζ は正の定数であることから、 \mathbf{l} と \mathbf{s} は [⑦ (平行・反平行)] に結合した方が安定となる。

Mn などのある種の不完全殻を持つ多電子原子の場合には、不完全殻内の電子に対して軌道角運動量同士ならびにスピン角運動量同士をそれぞれベクトル合成して合成軌道角運動量 $\hbar\mathbf{L}$ と合成スピン角運動量 $\hbar\mathbf{S}$ をつくる。さらに、この $\hbar\mathbf{L}$ と $\hbar\mathbf{S}$ をベクトル合成して合成全角運動量 $\hbar\mathbf{J} = \hbar\mathbf{L} + \hbar\mathbf{S}$ をつくる。この原子の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_J$ は、 \mathbf{L} と \mathbf{S} を用いて

$$\boldsymbol{\mu}_J = [\quad \text{⑦} \quad] \mu_B \quad (11)$$

と書き表される。これらの $\hbar\mathbf{j}$ 、 $\hbar\mathbf{L}$ 、 $\hbar\mathbf{S}$ の量子数をそれぞれ J 、 L 、 S とすると、与えた L と S の値について可能な電子の状態の総数は [⑧] 個あるが、基底状態の電子配置はフントの規則を適用して求まる。

次に、磁界を印加したときの式(4)で表される軌道磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_l$ の運動を古典的モデルによって解析しよう。図 3-2 に示す直角座標系 xyz において、 $\boldsymbol{\mu}_l$ は磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ ($B_z > 0$) の一様な静磁界によりトルク \mathbf{N} を受ける。そのトルクは

$$\mathbf{N} = [\quad \text{⑨} \quad] \quad (12)$$

と書け、トルクは軌道角運動量の時間変化に等しいので

$$\frac{d(\hbar\mathbf{l})}{dt} = \mathbf{N} = [\quad \text{⑨} \quad] \quad (13)$$

なる関係式が得られる。さらに、式(4)の関係と μ_B を用いると

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}_l}{dt} = [\quad \text{⑩} \quad] \quad (14)$$

となる。 $\boldsymbol{\mu}_l$ を (μ_x, μ_y, μ_z) と表し、 $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ であることを用いると、式(14)は

$$\frac{d\mu_x}{dt} = [\quad \text{⑪} \quad] \quad (15)$$

$$\frac{d\mu_y}{dt} = [\quad \text{⑫} \quad] \quad (16)$$

$$\frac{d\mu_z}{dt} = [\quad \text{⑬} \quad] \quad (17)$$

となる。式(15)を μ_x についての、式(16)を μ_y についての2階微分方程式として書き表すと、

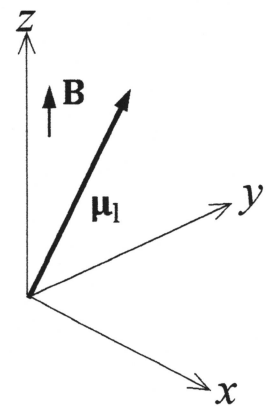


図 3-2

$$\frac{d^2\mu_x}{dt^2} = [\text{㉑}] \quad (18)$$

$$\frac{d^2\mu_y}{dt^2} = [\text{㉒}] \quad (19)$$

が得られる. 式(15)~(19)から, μ は [㉓ ($xy \cdot yz \cdot zx$)] 面内で歳差運動をしており, その角周波数 ω_1 は

$$\omega_1 = [\text{㉔}] \quad (20)$$

で与えられ, 図 3-2 の+z方向から見たとき [㉕ (時計回り・反時計回り)] の回転であることが分かる.

問1 文章中の空欄 [㉑] ~ [㉔] にあてはまる数値または数式を答えよ. 空欄 [㉕] ~ [㉖] については適切な語句を一つ選ぶこと.

問2 下記の化合物(A)~(C)が常磁性を示す温度領域について考える. その磁化率の逆数 $1/\chi$ の温度依存性として最も適切なグラフ(実線)を図 3-3 から選びその記号(あ)~(お)で答えよ. ここで, 点線は外挿を示し, T は絶対温度を表す.

- (A) $\text{NH}_4\text{Fe}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ [硫酸第二鉄アンモニウム(鉄ミョウバン)]: 常磁性体
- (B) EuO : キュリー温度 69 K の強磁性体
- (C) MnO : ネール温度 116 K, 常磁性キュリー温度 610 K の反強磁性体

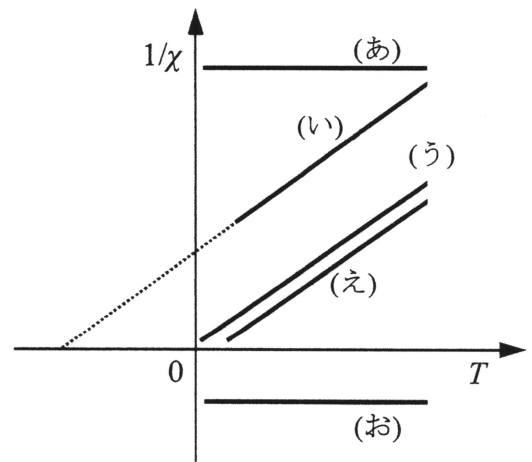


図 3-3

問3 中性の希ガス原子は $\mathbf{L} = \mathbf{S} = \mathbf{0}$ であることから, 式(11)で表される上述の議論によれば巨視的な磁気モーメントを持たない. しかしながら, 実際には磁界に応答し, 磁化が発生する. その磁性の名称を次の(常磁性・フェリ磁性・強磁性・反磁性・反強磁性)の中から選んで答えよ. また, その現象が現れる理由を 50 字程度で説明せよ.

量子電子物性3 単語の英訳

磁性：	magnetism
素電荷：	elementary charge
磁気モーメント：	magnetic moment
軌道：	orbital
スピン：	spin
角運動量：	angular momentum
半径：	radius
角速度ベクトル：	angular velocity vector
回転運動（円運動）：	rotational motion
単位ベクトル：	unit vector
環状電流：	circular current
ボーア磁子：	Bohr magneton
原子核：	atomic nucleus
1 電子原子：	single-electron atom
磁界：	magnetic field
スピン軌道相互作用：	spin orbit interaction
全角運動量：	total angular momentum
正の定数：	positive constant value
量子数：	quantum number
平行・反平行：	parallel・anti-parallel
不完全殻：	incomplete shell
多電子原子：	many-electrons atom
ベクトル合成：	vector composition
可能な電子状態：	possible electronic states
フントの規則：	Hund's rule
磁束密度：	magnetic flux density
トルク：	torque
歳差運動：	precessional motion
時計回り・反時計回り：	clockwise・counter clockwise
磁化率：	magnetic susceptibility
常磁性体：	paramagnet
キュリー温度：	Curie temperature
強磁性体：	ferromagnet
ネール温度：	Néel temperature
反強磁性体：	antiferromagnet
希ガス原子：	noble gas
フェリ磁性：	ferrimagnetism
反磁性：	diamagnetism

【信号処理】 解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

1. 離散時間信号 $x[n]$ (n は整数) の離散時間フーリエ変換 $X(\Omega)$ を以下のように与える。ただし、 Ω は正規化角周波数であり、 j は虚数単位とする。

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

以下の問いに答えよ。なお、

$$\delta[n-a] = \begin{cases} 1 & n = a \\ 0 & n \neq a \end{cases}$$

とする。ただし、 a は整数である。

- (i) 以下の離散時間信号 $x_1[n]$ の離散時間フーリエ変換 $X_1(\Omega)$ を求めよ。ただし、 α は実数かつ $0 < \alpha < 1$ とする。

$$x_1[n] = \alpha^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \delta[n-m]$$

- (ii) 以下の離散時間信号 $x_2[n]$ の離散時間フーリエ変換 $X_2(\Omega)$ を求めよ。ただし、 M を正の整数とする。

$$x_2[n] = \sum_{m=-M}^M \delta[n-m]$$

2. 周期 N の離散時間複素信号 $x[n]$ (n は整数) を 1 周期だけ取り出し、離散フーリエ変換を行うことを考える。このときの離散フーリエ変換 $X[k]$ (k は整数) を以下のように与える。

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (1)$$

なお、 N を 2 のべき数、 j を虚数単位とし、 W_N は $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ で与えられる複素数とする。また、 N 点の離散時間信号 $x[n]$ の離散フーリエ変換を N 点 DFT と呼ぶ。

- (i) 式 (1) は以下のように行列表現できる。

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^{0 \cdot 0} & W_N^{0 \cdot 1} & \cdots & W_N^{0 \cdot (N-1)} \\ W_N^{1 \cdot 0} & W_N^{1 \cdot 1} & \cdots & W_N^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1) \cdot 0} & W_N^{(N-1) \cdot 1} & \cdots & W_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

上記の行列に基づいて、 N 点 DFT を行うとする。最小の複素乗算の回数を求めよ。ここでは、 W_N^{kn} は与えられているものとする。また、行列演算中に重複した複素乗算があったとしても、使いまわさずに個別に数え上げることにする。

- (ii) $x[n]$ を n が偶数番目の信号 $x_e[n] = x[2n]$ と奇数番目の信号 $x_o[n] = x[2n + 1]$ に分解する。それぞれの $N/2$ 点 DFT の結果を $X_e[k]$, $X_o[k]$ とする。 $x[n]$ の N 点 DFT である $X[k]$ を $X_e[k]$ と $X_o[k]$ を用いて表せ。
- (iii) 以下のアルゴリズムに従い、高速フーリエ変換 (FFT) を行う。なお、 N 点 DFT を FFT を用いて実施することを N 点 FFT と呼ぶ。

$x[n]$ を n が偶数番目の信号と奇数番目の信号に分割し、それぞれに $N/2$ 点 DFT を行った後に、バタフライ演算を行う。これを再帰的に繰り返し、離散フーリエ変換をバタフライ演算に分解する。

このアルゴリズムを用いて、4 点 FFT をバタフライ演算に分解することを考える。再帰繰り返しの過程で現れる DFT を全てバタフライ演算に分解した場合の高速フーリエ変換をフローグラフを用いて可視化せよ。図 1 に、バタフライ演算を行うフローグラフの例を示す。例では、バタフライ演算への入力が x_1 と x_2 であり、出力が y_1 と y_2 である。フローに重みを記載することで、フローへの入力が定数倍される。ただし、値が1のフローには重みを図に記載しなくても良い。

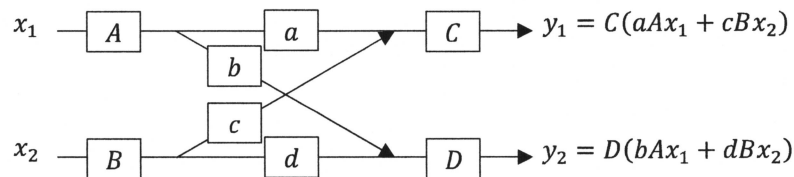


図 1

- (iv) 問い (iii) で定義したアルゴリズムに従う高速フーリエ変換により N 点 FFT を行うときに必要な複素乗算回数を L_C とする。ここで、 C は $C = \log_2 N$ と定義する。 L_C と L_{C-1} の関係を求めよ。また、 L_C を N を用いて示せ。
- (v) 256 点 FFT を問い (iii) で定義したアルゴリズムに従う高速フーリエ変換を用いて実行する。演算内の 4 点 DFT は、バタフライ演算でなく、問い (i) の演算により、直接求めるとする。 256 点 FFT を行うときに必要な複素乗算回数を求めよ。なお、4 点 DFT を問い (i) に基づいて計算する際に、重複した複素乗算があった場合はその結果を使いまわして良いとする。

専門用語の英訳	
離散時間信号	discrete time signal
離散時間フーリエ変換	discrete time Fourier transform
離散フーリエ変換	discrete Fourier transform
高速フーリエ変換	fast Fourier transform
バタフライ演算	butterfly computation
フローグラフ	flow graph